2005年度入学　文Ⅲ８組

2005年度夏学期　　記号論理学Ｉ　信原幸弘

はじめに

記号論理学とは、記号を用いて推論とはいかなるものかを研究し、推論の真偽を考えるものです。

例　三段論法（アリストテレス）

全ての人は動物である　　前提 → p_1

ソクラテスは人間である　　記号化　p_n

∴ソクラテスは動物である ← 結論 → q

正しい推論とは？

→ 前提が真であれば必ず結論も真となるような推論です。

推論の形式的性格

→ 推論の形式だけが問題で具体的内容は関係ありません。

例

全ての猫は犬である・・・偽　　全ての文は偽でありますが、形式は

ソクラテスは猫である・・偽

∴ソクラテスは犬である・・偽

全てのＰはＱ ａはＰ
ａはＱ

と同じであるため推論としては正しいです。

論理学は推論の形式の正しさを追求する学問です。

論理的真理　Ｐ　Ｑ　（太郎が打つをＰ、次郎が打つをＱとする）

太郎が打つならば、次郎も打つ　　　Ｐならば Ｑ

太郎が打つ　　→　Ｐ

∴次郎が打つ　　∴Ｑ

※最も基本的なこの形式をモードゥス・ポーネンス（前件肯定式）といいます。

条件文　Ｐならば Ｑ

前件　後件

条件文の前件が真なら後件も真、また、後件が真なら前件も真のとき恒真といいます。論理的真理とは、恒真文（常に正しい文）のことをいいます。

雨が降るか、または雨は降らない。

→ ＰまたはＰではない（排中律）　これも恒真文です。

命題論理

文結合子

文結合子とは文法でいう接続詞に相当します。

例　かつ　または　だから　しかし　など

論理学で扱う文結合子は以下の５つのみです。　※（　）内のように表記することもあります。

かつ　　連言　＆　（∧）

または　選言　∨

ならば　含意　→　（⊃）

ーならば、その時に限り（if and only if）　同値　≡

ーでない　否定　ー　（¬）

その他のもの（だから、けれどもなど）は扱いません。この５つの文結合子は推論関係が簡単だからです。

例

「暖かくて風が強い」という文章を考えます。まずは単文（それ以上単純にならない文）に分けますと、「風が暖かい」という要素と「風が強い」という要素に分けられます。前者の要素をｐ、後者の要素をｑとするとこの文は「ｐ＆ｑ」と記号化できます。ここで、ｐが真でｑも真ならｐ＆ｑも真になることが分かります。これを表にすると以下のようになります。

ｐ	ｑ	ｐ＆ｑ
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

このように記号化すると論理構造がすっきりしてわかりやすくなります。左の例のように、構成する単文の真理値（真もしくは偽）を定めると文章全体の真理値がただ一つに定まるものを真理関数と呼びます。先ほどの５つの文結合子は、文結合子の中でも真理関数を作れる文結合子です。

このような表を真理表といいます。

※以下簡略化のため真を１、偽を０と表すことにします。

文結合子の意味

１否定　ー

例　　富士山は火山ではない。

「富士山は火山である」をｐとするとこの文は「ーｐ」となり真理表は次のようになります。

ｐ	ーｐ
1	0
0	1

ｐが真ならーｐは偽で、ｐが偽ならーｐです。

二重否定

日本語では「あなたは美しい」≠「あなたは美しくない」ですが、「あなたは美しい」をｐとしますと、ｐとーーｐは常に同じ値をとります。つまり、ｐ≡ーーｐ（同値）となります。

２連言　＆

例　　<u>太郎は大学生であり</u>かつ<u>太郎は一人暮らし</u>である。

ｐ　　ｑ　と定めると真理表は次のようになります。

p	q	p＆q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

※＆と「かつ」のずれ

例　太陽は輝き　かつ　２＋３＝５　・・・×（文としては意味不明）

p　&　q　・・・○（ｐもｑも真だから）

３選言

例　$\underbrace{\text{次郎は春子が好き}}_{p}$かまたは$\underbrace{\text{次郎は秋子が好きだ}}_{q}$。

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

※左のような選言を両立的選言といい、ｐが１、ｑが１の時、ｐ∨ｑが０となるような選言を排反的選言といいます。論理学では、連語との対称性から両立的選言のみを使います。

４含意　→

例　$\underbrace{\text{明日晴れたら}}_{p\,\text{前件}}$$\underbrace{\text{動物園に子供を連れて行く}}_{q\,\text{後件}}$。　（論理学　野矢茂樹　著　より引用）

p	q	p→q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

翌日晴れて子供を本当に動物園に連れて行きましたら真、連れて行かなかったら嘘、偽になります。ここで、翌日雨が降ったらどうなるでしょうか。子供を連れて行っても、連れて行かなくても嘘にはならない、と分かります。つまり、前件が偽なら、後件が何であれ全体は真になります。この定義の望ましさは、対偶や裏、逆などの関係からも明らかです。

$$\begin{tikzcd} p\to q \arrow[r, "\text{裏}"] \arrow[d, "\text{逆}"'] \arrow[dr, "\text{対偶}"] & \backsim p\to\backsim q \\ q\to p & \backsim q\to\backsim p \end{tikzcd}$$

$p\to q \neq q\to p$　（逆は同値とは限らない）

$p\to q = \backsim q\to\backsim p$　（対偶は同値）

５同値　≡

これはそのまま考えればよいです。ｐとｑの真理値が同じなら真です。

p	q	p≡q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

以上をまとめると文結合子の真理表は次のようになります。

p	∽p	p	q	p＆q	p∨q	p→q	p≡q
1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0
		0	1	0	1	1	0
		0	0	0	0	1	1

真理値計算

与えられた日本語の文を記号に置き換え真理表を作れ。

例題　　太郎が犯人なら次郎は犯人ではない。

ｐ…太郎が犯人　　ｑ…次郎が犯人　　と置きます。

すると例題は「ｐ→～ｑ」となります。よって、真理表は以下のようになります。

p	q	p→～q
1	1	１００１…０
1	0	１１１０…１
0	1	０１０１…１
0	0	０１１０…１

①まずｐ、ｑの真理値を書き込みます。

②次に～の計算をして、→の計算をします。

③全体の真理値が求まります。

①

p	q	p→～q
1	1	1　　1

②

p	q	p→～q
1	1	１００1……０

③

※結合の強さ（計算の順序）

≡＜→＜∨＜＆＜～

練習問題　与えられた日本語の文を記号に置き換え真理表を作れ。

練習１　レモンはおいしそうに見えるがすっぱい。

練習２　できますよ。やろうとおもえば。

練習３　彼は今日か明日来るだろうが、あさってには来ないだろう。

練習４　神も悪魔もいないなら、宗教心を起こすのは難しい。

練習５　その猫を追い出しなさい。さもないと、出て行きますよ。

真理表による推理

文章を記号化して真理表を書いて推理します。

例題１　　ある窃盗事件の２人の容疑者 a, b について次の事実が明らかになった。

⑴a または b が犯人である。

⑵a が犯人でないのに、b が犯人だ、ということはない。

誰が犯人で誰が犯人でないかを考えます。

ａが犯人である…Ａ　　ｂが犯人である…Ｂ　として、⑴と⑵を記号化して考えます。

⑴Ａ∨Ｂ　　⑵～（～Ａ＆Ｂ）となるので、この二つの真理表を考えます。⑴と⑵両方が真の時全体も真となります。よって、⑴と⑵の両方が真となる値を探せば良いです。

	A	B	A∨B	～（～A＆B）	
◎	1	1	１１１…１	1　０１１１…１	……１
◎	1	0	１１０…１	1　０１００…１	……１
×	0	1	０１１…１	0　１０１１…０	……０
×	0	0	０００…０		……０

⑴が偽なので⑵は考えなくても全体は偽になると分かる。

結論

Ａは真である…ａは必ず犯人である。

Ｂは真、偽どちらともいえない…ｂは犯人かどうか不明である。

次も同様に考えます。

例題２　　ある殺人事件の３人の容疑者 a, b, c について次の事実が確認された。

⑴a, b, c のうち少なくとも１人は有罪である。

⑵a が有罪なら、b または c が共犯である。

⑶c が有罪なら、a または b が共犯である。

⑷b が有罪なら共犯者はいない。

⑸a, c のうち少なくとも１人は無罪である。

a が犯人である…Ａ　　b が犯人である…Ｂ　　c が犯人である…Ｃ　　として⑴ー⑸を記号化します。

⑴Ａ∨Ｂ∨Ｃ　⑵Ａ→Ｂ∨Ｃ　⑶Ｃ→Ａ∨Ｂ　⑷Ｂ→〜Ａ＆〜Ｃ　⑸〜Ａ∨〜Ｃ

	Ａ	Ｂ	Ｃ	Ａ∨Ｂ∨Ｃ	Ａ→Ｂ∨Ｃ	Ｃ→Ａ∨Ｂ	Ｂ→〜Ａ＆〜Ｃ	〜Ａ∨〜Ｃ
×	1	1	1	1 1 1 1 1…1	1 1 1 1 1…1	1 1 1 1 1…1	1 0 0 1 0 0 1…0	
×	1	1	0	1	1 1 1 1 0…1	0 …1	1 0 0 1 0 1 0…0	
×	1	0	1	1	1 1 0 1 1…1	1 1 1 1 0…1	0 …1	0 1 0 0 1…0
×	1	0	0	1	1 0 0 0 0…0			
×	0	1	1	1	0 …1	1 1 0 1 1…1	1 0 1 0 0 0 1…0	
◎	0	1	0	1	0 …1	0 …1	1 1 1 0 1 1 0…1	1 0 1 1 0…1
×	0	0	1	1	0 …1	1 0 0 0 0…0		
×	0	0	0	0				

全部やらなくても分かる　　　　前件が偽なので

偽なので後はやる必要なし

以上よりＡは偽、Ｂは真、Ｃは偽であることが分かりました。

∴a は無罪である　　b は有罪である　　c は無罪である（答）　　ということが分かりました。

練習問題

練習６　ある事件の容疑者 a, b, c について次の事実が立証された。

⑴a, b, c のうち少なくとも１人は有罪である。

⑵a 及び b が有罪なら c は無罪である。

⑶b が有罪なら a も有罪である。

⑷c が有罪なら a も有罪である。

誰が有罪で、誰が無罪か。真理表を書いて判定しなさい。

練習７　ドラキュラ伝説の地トランシルヴァニアで３人の怪しい人物に出会った。

⑴a, b, c のうち少なくとも１人は吸血鬼である。

⑵a が吸血鬼で c が吸血鬼でないなら、b は吸血鬼である。　　Ｃ→Ａ＆〜Ｂ∨〜Ａ＆Ｂ

⑶c が吸血鬼なら a, b のうちにもう１人だけ吸血鬼がいる。　　または　Ｃ→（Ａ∨Ｂ）＆〜（Ａ＆Ｂ）

⑷a が吸血鬼なら c は吸血鬼ではない。

⑸c が吸血鬼なら b は吸血鬼ではない。

恒真文と矛盾文

例

p	p ∨ 〜 p
1	1 1 0 1
0	0 1 1 0

→ このように恒に真となる文を恒新文といいます。

p	p ＆ 〜 p
1	1 0 0 1
0	0 0 1 0

→ このように恒に偽となる文を矛盾文といいます。

恒真文の判定法

⑴真理表を書いて考えます。

例　（ｐ→ｑ）→（〜ｑ→〜ｑ）　対偶律

p	q	（p → q） → （〜 q → 〜 q）
1	1	1 1 1　1　0 1 1 0 1
1	0	1 0 0　1　1 0 0 0 1
0	1	0 1 1　1　0 1 1 1 0
0	0	0 1 0　1　1 0 0 1 0

← 確かに全て真になりますが、少々面倒です。そこで、もっと楽な方法を考えます。

⑵背理法を用いて考えます。

背理法…与えられた文を偽と仮定して矛盾が出ればその文は真であると分かります。恒真文の判定では、与えられた文が偽となることがあると仮定して、矛盾がでるかどうか調べます。

例題１　（ｐ→ｑ）→（〜ｑ→〜ｐ）

	ｐ	→	ｑ	→	〜	ｑ	→	〜	ｐ	
①				0						
②		$\boxed{1}$					0			
③					1			0		
④						0			1	
⑤	1		0							
⑥		$\boxed{0}$								矛盾

①まず全体が偽になると仮定します。

②するとこの場合、前件が真、後件が偽でなければいけません。

③後件が偽になるのは、後件の前件が真で後件の後件が偽の時だけです。

④否定を戻します。

⑤　④で出てきたｐとｑの真理値を前件に代入します。

⑥矛盾が生じましたので、この文は偽になることがありえず恒真文であると分かります。

以下同様の手順で背理法を行います。

例題２　（ｐ∨ｑ）＆ｒ→ｐ

	ｐ	∨	ｑ	＆	ｒ	→	ｐ
①						0	
②				1			0
③	0	1			1		
④			1				

①全体を偽と仮定します。

②前件が真、後件が偽となります。

③, ②のｐの値を前件代入、また、前件が真になるように仮定します。

④ｑが真であれば全体が偽となり、仮定どおりとなり矛盾は生じません。
よって、この文は恒真文ではありません。

p	q	r	（p ∨ q） ＆ r → p
0	1	1	0 1 1　1 1 1 0

確かに偽になっています。

練習問題　背理法により次の文が恒真文かどうかを判定せよ。

練習８　（Ａ∨Ｂ）＆〜Ａ→Ｂ

練習９　（Ａ∨Ｂ）＆Ａ→〜Ｂ

練習 10　（Ａ＆Ｂ）∨（Ａ＆Ｃ）→Ａ＆（Ｂ∨Ｃ）

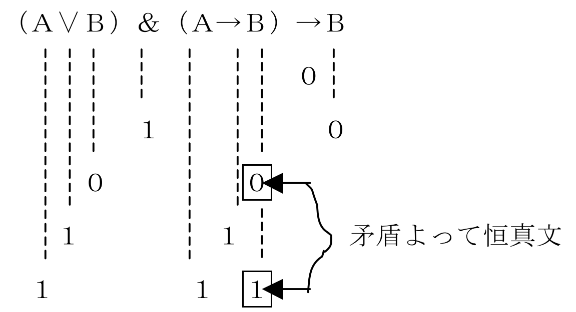
恒真文と推論

A∨B　　左の論法について考えてみます。A∨Bが真でA→Bが恒に真の時、Bは恒に真という推論です。この推

A→B　　論が正しいことはすぐに分かると思います。では、この推論を命題論理の形で表すとどうなるでしょうか。

∴B

対応する条件文



恒真文であることが分かります。以上から次に関係が分かります。

推論が正しいので恒真文 ⟷ 恒真文なので推論が正しい

このことを用いて推論の正しさについて考えてみます。

例題　　ある宝石店に泥棒が入った。調査の結果、次の事実が明らかになった。

⑴容疑者はa, b, cの３人で、少なくとも１人は犯人である。

⑵aが盗みをやろうとする時には必ずbを相棒にする。

⑶犯行時刻にbは行きつけのスナックで飲んでいた。

そこで、H刑事はcが犯人だと結論した。この推論は正しいか？

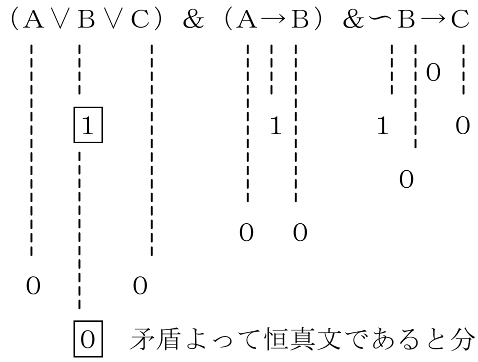
aが犯人…A　bが犯人…B　cが犯人…C　と定めます。すると次のように書けます。

⑴A∨B∨C

⑵A→B

⑶～B

∴　C



矛盾よって恒真文であると分かります。

恒真文になったので、推論は正しかった、ということが分かります。

練習問題

練習 11　⑴aまたはbは犯人ではない。

⑵bが犯人ならaも犯人だ。

ここからbは犯人でないと結論できるか。

命題論理の統語論と意味論

統語論

　有意味な表現（整式）を確定するものです。例えば、日本語の場合「太郎は歩く」という文は有意味ですが、「は太郎歩く」という文は単語としては正しいですが意味をなしません。有意味であるためには、その言語の語彙と形成規則に従う必要があります。

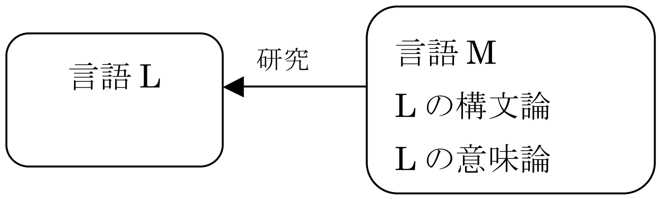
意味論

　整式に対して解釈（意味）を与えるものです。例えば、「太郎は走る」という有意味な文を「太郎」（主語）「は」（助詞）「走る」（動詞）といった要素の意味をもとに全体の意を定めます。

形式言語（人口言語）⟷ 自然言語（日本語など自然に生まれて有意味なもの。）

　統語論によって構成され、意味論によって解釈される人為的に定められた言語です。

対象言語とメタ言語



対象言語　　　　　　　　　　メタ言語

命題論理の統語論

⑴語彙

語彙には次のようなものがあります。

ⅰ無限に多くの文記号　p, q, r, a, b, c, など……

ⅱ文結合子　～　＆　∨　≡　→

ⅲかっこ　（　）

以上で語彙は全てです。

⑵形成規則

ⅰ全ての文記号は整式とします。

ⅱαとβが任意の整式だとすると、次（以下）のものも整式とします。

ａ. ～α

ｂ. α＆β　　×＆αβ　（これは整式ではありません）

ｃ. α∨β

ｄ. α→β

ｅ. α≡β

整式の例

ｐ、ｑを整式とすると、～ｐ、～～ｐ、～～～ｐは全て整式です。また、

ｐ＆ｑやｐ＆ｑ∨ｐ、（ｐ＆ｑ∨ｐ）→ｑ　なども整式です。

形成規則ⅱは回帰的なので、規則を適用した結果にその同じ規則を適用できます。

整式でない例

ｐ～　∨ｐ　∨ｐｑ　など意味をなさないものです。

命題論理の意味論

命題論理は真理値のみに興味がありますので、文の内容は関係ありません。

⑴任意の文記号に対して真または偽の値を付与します。

１つの解釈：全ての文記号それぞれに真か偽の値を割り振ったものです。

例

	p	q	r	p＆q→r
１つの解釈 →	1	1	1	
１つの解釈 →	1	1	0	
１つの解釈 →	1	0	1	
１つの解釈 →	1	0	0	

⑵任意の整式α、βに対して次のことが成り立ちます。　　定義（definition）

ⅰ〜αが真である。　　def(=)　　αが偽である。

ⅱ α＆βが真である。　　def(=)　　αとβがともに真である。

ⅲ α∨βが真である。　　def(=)　　αとβの少なくとも一方が真である。

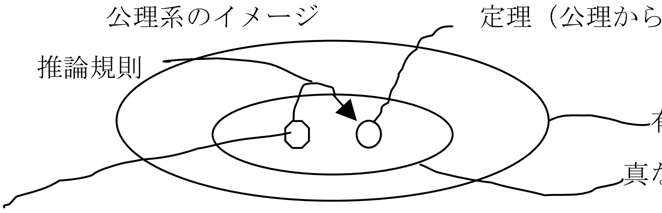
ⅳ α→βが真である。　　def(=)　　αが偽かまたはβが真である。

α	β	α→β
1	1	1 1 1
1	0	1 0 0
0	1	0 1 1
0	0	0 1 0

∴α→β≡〜α∨β

ⅴ α≡βが真である。　　def(=)　　αとβが同じ真理値を持つ。

公理系　　公理系のイメージ



公理系の目標　　真なる文（恒真文）を全て、そしてそれらだけを定理として証明することです。

この目標が達成できる時、その言語は完全であるといわれます。

命題論理の完全性定理

命題論理には完全な公理系が存在します。それは、命題論理の恒真文を全て、そしてそれらだけで証明できる公理系です。

例　ラッセル・ヒルベルトの公理系

（形式主義）

統語論を含みます。

Ⅰ記号論

⑴命題変項　ｐ、ｑ、ｒなどの文記号。

⑵論理語　〜　∨　（文結合子）　　※その他の結合子は「〜」と「∨」から定義します。

定義１　Ａ＆Ｂ　def(=)　〜（〜Ａ∨〜Ｂ）

定義２　Ａ→Ｂ　def(=)　〜Ａ∨Ｂ

定義３　Ａ≡Ｂ　def(=)　（Ａ→Ｂ）＆（Ｂ→Ａ）

⑶補助記号　（　）　｛｝『　』　など

Ⅱ論理式（整式）

⑴命題変項は論理式です。

⑵Ａが論理式ならば〜Ａも論理式です。

⑶Ａ、Ｂが論理式ならば〜Ａも論理式です。

Ⅲ公理

ａ　ｐ∨ｐ→ｐ

ｂ　ｐ→ｐ∨ｑ

ｃ　ｐ∨ｑ→ｑ∨ｐ

ｄ　（ｐ→ｑ）→（ｒ∨ｐ→ｒ∨ｑ）　　この４つを公理とします。

Ⅳ変形規則（推論規則）

α　代入規則

１つの論理式の中の命題変項は全て一斉に任意の論理式で置き換えて良いです。

例　ｐ→ｐ∨ｑ　の時、ｐ＝ｒ＆ｓなら　（ｒ＆ｓ）→（ｒ＆ｓ）∨ｑ　としても良いです。

※但し　ｒ＆ｓ→ｐ∨ｑ　は駄目です。

β　推論規則

Ａ、Ｂが論理式の時、ＡとＡ→ＢからＢを得ることができます。

※参考モードゥス・ポーネンスの定理（前件肯定式）p2

Ⅴ定理と証明

公理に対し、変形規則を０回以上適用して得られる論理式を定理といいます。また、公理から定理を得る過程を証明と呼びます。

例題

定理１　（ｑ→ｒ）→｛（ｐ→ｑ）→（ｐ→ｒ）｝　　Ⅲ公理ｄより　Ⅳ変形規則αより　以下同様

証明　①（ｑ→ｒ）→（〜ｐ∨ｑ→〜ｐ∨ｒ）　（ｄ　αから）

②（ｑ→ｒ）→｛（ｐ→ｑ）→（ｐ→ｒ）｝　（定義２より）

以上、確かに公理から変形規則に基づいて定理を得ることができました。

練習問題

練習 12　定理２ ｐ→ｐ（同一律）を例題に倣って証明しなさい。

練習 13　定理３ ｐ∨〜ｐ（排中律）を例題に倣って証明しなさい。

命題論理の完全性定理

ラッセル・ヒルベルトの公理系（R-H系）は完全です。

１R-H系の全ての定理は恒等式です。(完全性)

２恒等式は全てR-H系の定理です。(狭義の完全性)

述語論理

文の内部構造

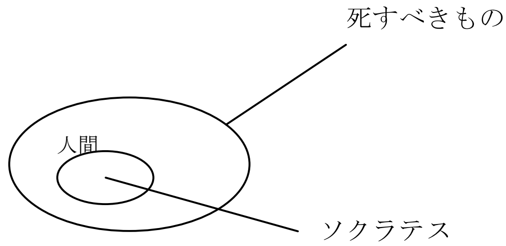
命題論理の限界

全ての人は死すべきものである… p

ソクラテスは人間である………… q

∴ソクラテスは死すべきものである… r

命題論理では「すべて」やｐとｑの共通の「人間」という語の存在を示していません。



p

q

∴ r

ｐ＆ｑ→ｒ

１１１００

正しくない ←→ 恒真文でない（偽の場合が存在する）

述定（主述文）

そこで、主語と述語を別々に考えます。

ソクラテスは人間である

主語（個体）　述語（属性、性質）

ここで主語をａ、ｂ、ｃといった個体定項、述語をＦ、Ｇ、Ｈなどの述語定項で表しますと、さっきの文章は、

ソクラテスは人間である

a　　F

となり、Ｆａと表します。（aＦは間違いです。）

変項と開放文

⑴Ma →特定の個体を表します（個体定項）

→特定の述語を表します（述語定項）

⑵Mx →任意の個体を表します（個体変項）

※個体変項にはアルファベットの最後の方をもちいます。

⑶Φx →任意の述語を表します（述語変項）　授業では扱いません。

開放文　　真理値の定まらない文です。

例　Mx　など

閉鎖文　　真理値が定まる文です。

名辞の分類　　名辞（文の構成要素）には、個体定項や個体変項などの個別名辞と、述語定項や述語変項などの一般名辞があります。

多項述語

例１　（ソクラテス）は人間である。

述語は「(　) は人間である」という形になっていて個体が入るべき項が１つあります。この時、この文は１項述語であります。

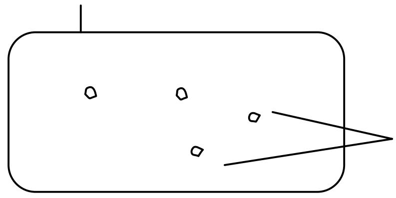
例２　（ジャック）は（ジル）に（そのりんご）を与えた。　（　）が３つなので３項述語です。

練習問題

練習 14　次の文は何項述語か。答えよ。

１神が世界を創造した。　２名古屋は東京と大阪の間にある。

量化子



全称量化子

⑴全ては流転する。

「全て」を∀という記号で表し、この∀を全称量化子と呼びます。

※量化子とは変項を束縛するものです。

例　　全てのｘについてｘは流転する。

「全て」を∀、「流転する」という述語をＦで表すとすると、例は次のようになります。

∀ｘＦｘ

開放文と量化

Ｆｘ　という文について考えてみます。この文にはｘを量化する（束縛する）量化子はありませんので、ｘは自由に決めることができます。この場合のｘを自由変更といい、自由変項を含む文を開放文といいます。

次に　∀ｘＦｘ　という文について考えてみます。この文にはｘを量化する全称量化子∀がありますので、ｘは束縛されています。この場合のｘを束縛変項といい、<u>自由変項を含まない</u>文を閉鎖文といいます。

例題１　　Mx→Ｃｘ　…………量化子は１つもなく、ｘは自由変項なので開放文です。

例題２　　∀ｘ（Mx→Ｃｘ）…「∀x」が「Mx」と「Ｃｘ」を量化するのでｘは束縛変項となり、自由変項は１つもないので、閉鎖文です。

例題３　　Ｇxy　……………ｘとｙはともに自由変項となるので開放文です。

例題４　　∀ｘＧxy　………「∀x」は「Ｇxy」の「x」だけを量化しますので、ｘは束縛変項ですが、ｙを量化する量化しはないので、ｙは自由変項となります。自由変項を含みますのでこの文は開放文です。

例題５　　∀y∀ｘＧxy　………「∀y」と「∀x」がそれぞれ「Ｇxy」の「y」と「x」を量化しますので、ｘもｙも束縛変項となるので、閉鎖文です。

量化子の作用域（及ぶ範囲）

∀ｘＦｘ＆Ｇｘ　　という時には、量化子は「Ｆx」だけにかかり「Ｇx」にはかかりません。一方、

∀ｘ（Ｆｘ＆Ｇｘ）という時には、(　）があるため、「Ｆｘ＆Ｇx」全体にかかります。

練習問題

次の文が開放文か閉鎖文か調べよ。

練習 15　∀ｘ（Ｆｘ→Ｌｘ）＆Ｋｘ

練習 16　　Ｆａ∨∀ｘ（Kx→Ｇxa）＆∀ｘＧxa

練習 17　　∀ｘ（Kx→Ｆｙ＆Ｇxa）

練習 18　　∀ｙ∀ｘ(Kx→Ｆｙ＆Ｇxa)

練習 19　　∀ｘ（Kx→∀ｙＧxy＆∀ｚＦzy）

存在量化

「ある」「……が存在する」「少なくとも１つの…」などを∃という記号で表し、存在量化と呼びます。例えば、「あるものは保守的だ」という文を考えます。この文は「保守的であるものが存在する」と同じであり、「あるｘについてｘは保守的だ」になります。「保守的だ」というのをＣとすると、次のように記号化できます。

$$\exists x Cx$$

「全てのＦはＧである」　「あるＦはＧである」の記号化

⑴全ての女は美しい。

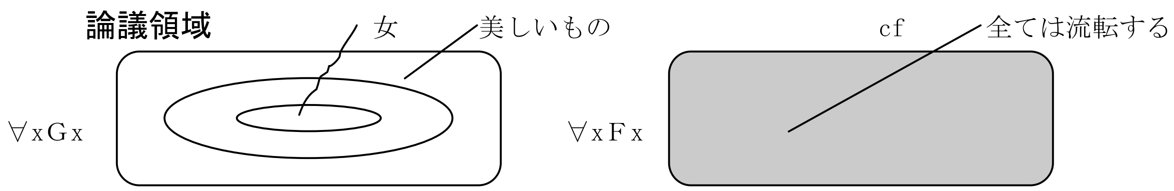
この文を記号化してみます。「女」をＦ、「美しい」をＧとすると、この文は「全てのｘについてｘが女ならば、ｘは美しい」というように解釈できますのでこの文の記号化は次のようになります。

$$\forall x (Fx \rightarrow Gx)$$

⑵ある女は美しい。

⑴と同様に「女」をＦ、「美しい」をＧとすると、この文は「女であってかつ美しいものがいる」＝「あるｘについて、ｘは女でありかつｘは美しい」と解釈できますのでこの文は次のようになります。

$$\exists x (Fx \& Gx)$$



例題１　太郎は全ての女を愛する。

太郎をａ、女をＦ、愛するをＬとします。するとこの文は「全てのｘについてｘが女ならばａは女を愛する」と解釈できますので次のようになります。

$$\forall x (Fx \rightarrow Lax)$$

例題２　次郎はある女を愛する。

次郎をａ、女をＦ、愛するをＬとします。「あるｘについてｘは女でありかつａはｘを愛する」と解釈します。

$$\exists x (Fx \& Lax)$$

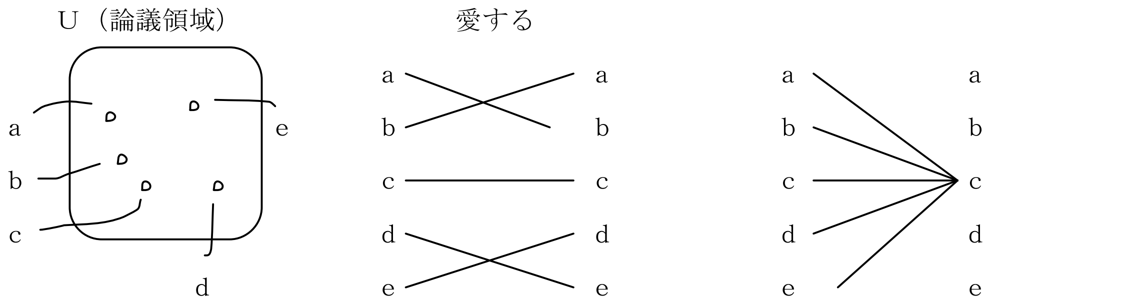
多重量化子と量化子の順序

例　<u>全ての</u>ものが<u>ある</u>ものを愛する。という文を考えてみます。（今、個体はａ、ｂ、ｃ、ｄ、ｅの５つとします。）

すると、次の２つの解釈が可能です。

解釈１　全てのものがそれぞれあるものを愛する。

解釈２　全てのものがある同一のものを愛する。



解釈１のみ正しい　　解釈１、２どちらでも正しい

解釈１では「全てのｘについてｘはあるものｙを愛する」となるので述語論理の記号表記は次のようになります。

∀ｘ∃ｙＬxy

解釈２では「あるｙについて全てのｘがｙを愛する」となるので次のようになります。

∃y∀ｘＬxy

例題

⑴全ての人は万物を愛する。　　人…Ｆ　愛する…Ｌ　とする。

→ ∀ｘ（Ｆｘ→∀ｙＬxy）　（全てのｘに対してｘが人ならｘはあらゆるｙを愛する。）

or　∀ｘ∀ｙ（Ｆｘ→Ｌxy）　（全てのｘと全てのｙに対して、ｘが人ならｘはｙを愛する。）

⑵全ての男は全ての女を愛する。　　男…Ｆ　女…Ｇ　愛する…Ｌ　とする。

→ ∀ｘ{Ｆｘ→∀ｙ（Ｇy→Ｌxy）}

（全てのｘに対してｘが男なら、ｘは全てのｙに対して、全てのｙに対してｙが女なら、ｘはｙを愛する。）

or　∀ｘ∀ｙ（Ｆｘ＆Ｇy→Ｌxy）

（全てのｘとｙに対してｘが男でかつｙが女なら、ｘはｙを愛する。）

⑶ある人は万物を愛する。

→ ∃ｘ（Ｆｘ＆∀ｙＬxy）（あるｘについてｘが男でかつｘが全てのｙを愛する。）

⑷ある男は全ての女を愛する。

→ ∃ｘ{Ｆｘ＆∀ｙ（Ｇy→Ｌxy）}

（あるｘについてｘが男で、かつ全てのｙについてｙが女ならｘはｙを愛する。）

※全ての（　　）について（　　）の形の時は、

∀ｘ（Ｆｘ→……

となります。

ある（　　）について（　　）の形の時は、

∃ｘ（Ｆｘ＆……

となります。

練習問題

次の各文を述語論理の形になおしなさい。

練習 20　　ある男はある女を愛する。

練習 21　　全ての男はそれぞれある女を愛する。

練習 22　　ある女を全ての男は愛する。

練習 23　　馬の頭は全て大きい。

練習 24　　馬の頭は全て動物の頭である。

述語論理の統語論と意味論

統語論

基本的には命題論理（ｐ９）と同じです。

⑴語彙

ａ　個体定項　ａ、ｂ、ｃ、……

ｂ　個体変項　ｘ、ｙ、ｚ、……

ｃ　述語定項　Ａ、Ｂ、Ｃ、……

ｄ　文記号　　ｐ、ｑ、ｒ、……

ｅ　量化子　　∀　∃

ｆ　文結合子　～　∨　＆　→　≡

ｇ　かっこ　　（　）　｛　｝

⑵形式規則

ａ　全ての文記号は整式です。

ｂ　$t_1 t_2 \cdots\cdots\cdots t_n$ が個体名辞でＰがｎ項述語ならば　$P t_1 t_2 \cdots\cdots\cdots t_n$ は整式となります。

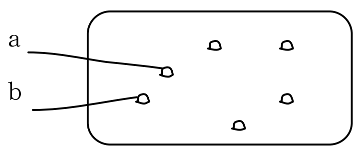
ｃ　ｘが個体変項で、αが自由変項としてｘを含む整式ならば、次のものも整式であります。

ｉ　$\forall x \alpha$　　ⅱ　$\exists x \alpha$

意味論

⑴個体定項の解釈

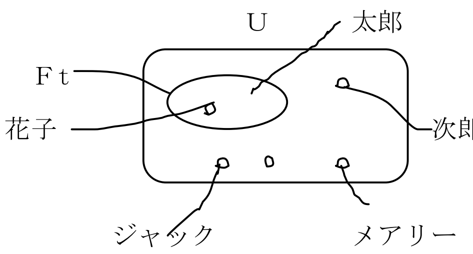
Ｕ（論議領域）



個体手定項には論議領域内の特定の個体が割り当てられます。

例　ａ…太郎　ｂ…メアリー　など

⑵述語定項の解釈



Gt_1t_2 という二項述語を考えます。Ｇを「愛する」とします。

Gt_1t_2の集合

⟷ ｛＜太郎、次郎＞、＜次郎、花子＞、＜花子、メアリー＞｝

としますと、太郎は次郎を愛していることなりますが、逆は成り立ちません。

一般にｎ項述語には順序ｎ組の集合が割り当てられます。

$Ht_1t_2t_3$　：｛＜太郎、次郎、花子＞、＜トム、ジャック、メアリー＞｝　など

⑶文記号の解釈

文記号には真または偽を割り当てます。

例　Ｐ…真　Ｑ…偽　など

解釈

１つの解釈は次のものから成ります。

①論議領域

②個体定項の解釈

③述語定項の解釈

④文記号の解釈　　　　　この４つが揃って初めて解釈が定まります。

⑷<u>Ｐｔという形の閉鎖文</u>の真理条件

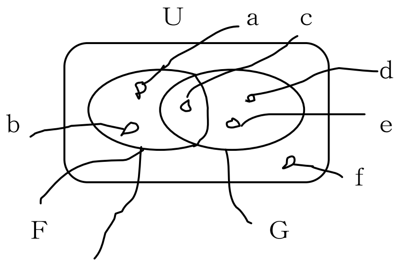
→例　Ｆａ　Ｇｂ

Ｐｔという形の閉鎖文がある解釈Ｉのもとで真であります。

iff　Ｉでｔに割り当てられた個体がＩでＰに割り当てられる個体の集合の要素であります。

つまり　Ｉ(t)∈Ｉ(P)

例



(述語定項Ｆの領域)

Ｆa…真　(例えばａ＝太郎、Ｆ＝男である、として考えてみます)

Gb…偽　(例えばｂ＝トム、Ｇ＝女である)

(ｂはＧに含まれないから)

練習問題　次の閉鎖文の真理値を左図を参考に答えよ

練習 25　⑴Ｆｄ　⑵Ｇｅ　⑶Ｇｆ

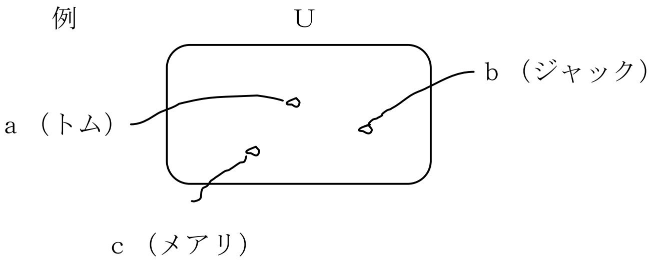
⑸Ｐt_1t_2……t_n という形の閉鎖文の真理条件

Ｐt_1t_2……t_n という形の閉鎖文がある解釈Ｉのもとで真である。

iff　Ｉでｔに割り当てられる個体からなる順序の組がＩでＰに割り当てられる個体の順序の組の集合の要素である。

つまり　＜Ｉ(t_1)Ｉ(t_2)…(t_n)＞∈Ｉ(P)

例



Ｆt_1t_2 {＜ａ、ｃ＞、＜ｃ、ｂ＞}

(例えば、Ｆを「愛する」としトムはメアリを愛すると考える)

Ｇt_1t_2 {＜ｂ、ａ＞、＜ｃ、ａ＞}

(例えば、Ｇをt_1の方がt_2より年上、と考える)

この時、Fab は偽となります。(Ｆに＜ａ、ｂ＞という集合がないから)

一方で、Fac は真となります。(Ｆに＜ａ、ｃ＞という集合があるから)

練習問題

練習 26　次の閉鎖文の真理値を、ＦとＧの集合を参考に答えよ

1　Ｆcb　　2　Ｆba　　3　Gab　　4　Gba

5　Gca　　6　Gba　　7　Gbc

⑹～α　α∨β　α＆β　α→β　α≡β　という形の閉鎖文の真理条件

ⅰ～αがある解釈Ｉで真である。　Iff　αがＩで偽となる。

ⅱα∨βがある解釈Ｉで真である。　iff　αとβの少なくとも一方がＩで真である。

ⅲα＆βがある解釈Ｉで真である。　iff　αとβがともにＩで真である。

ⅳα→βがある解釈Ｉで真である。　Iff　Ｉでαが偽かまたはβが真である。

ⅴα≡βがある解釈Ｉで真である。　iff　αとβがＩで同じ真理値を持つ。

⑺存在量化子の真理条件

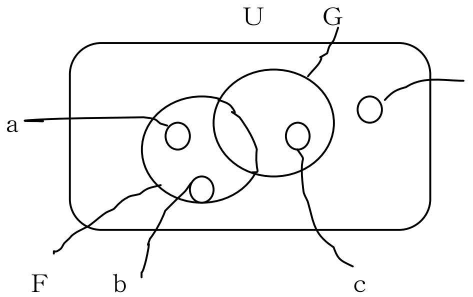
ｔを唯一の自由変項として含む文をＡ(ｔ)とします。

例　Ｆｔ　Ｇａｔ　など　（Hxt などｔ以外に自由変項があるのは駄目です。）

∃ｔＡ(t)がある解釈Ｉで真である。

iff　Ｉの論議領域内のある個体についてＡ(t)がＩで真である。

例



⑴∃ｘＦｘ…真　（あるｘに対してｘがＦの領域内に存在している）

（ａ、ｂ）がＦの領域内に存在しています。

⑵∃ｘ∽Ｆｘ…真　（ｃ、ｄ）が満たします。

練習問題

練習 27　左図を参考に例に倣い次の文の真理値と真となる時の個体を答えよ。

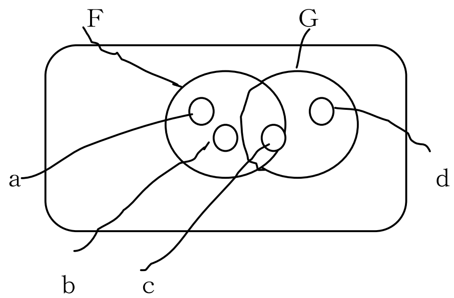
⑴∃ｘ（Ｆｘ＆Ｇｘ）　⑵∃ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）

⑻全称量化子の真理条件

∀ｔＡ(t)がある解釈Ｉで真である。

iff　Ｉの論議領域内の全ての個体についてＡ(t)がＩで真である。

例



⑴∀ｘＦｘ…偽　（全てのｘについてｘがＦの中に存在している）

（ｄ）はＦの領域の外に存在しています。

⑵∀ｘＧｘ…偽　（ａ、ｂ）があるので偽となります。

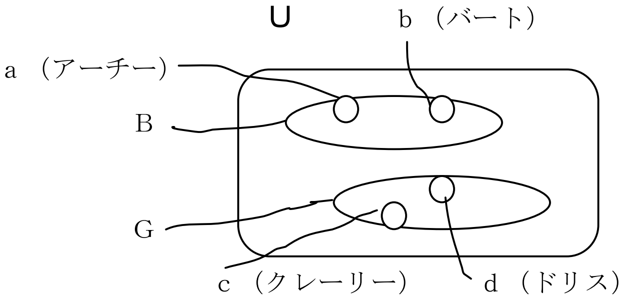
練習問題

練習 28　左図を参考に例に倣い次の文の真理値と偽となる時の個体を答えよ。

⑴∀ｘ（Ｆｘ∨Ｇｘ）　⑵∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）

練習問題

練習 29　次の解釈の下でａからｈまでの真理値を判定せよ。



Ｌを愛するとする。Ｂを男とする。Ｇを女とする。

Ｌ{＜アーチー、アーチー＞、＜バート、バート＞、
＜アーチー、クレーリー＞、＜アーチー、ドレス＞、
＜バート、クレーリー＞、＜クレーリー、アーチー＞、
＜ドリス、アーチー＞}

ａ　Ｇｘ　ｂ　∀ｘＬａｘ　ｃ　∽Ｌad∨∽Ｂｄ

ｄ　∽∃xＧｘ　ｆ　∃ｘ{Ｂｘ＆∀ｙ（Ｇｙ→Ｌｘｙ）}

ｇ　∀ｘ∀ｙ（Ｂｘ＆Ｇｙ→Ｌｙｘ）

ｈ　∀ｘ∀ｙ∀ｚ（Ｌｘｙ＆Ｌｙｚ→Ｌｘｚ）

恒真文

述語論理の恒真文

→ 全ての解釈の下で真なる文のことをいいます。

例　$\forall x Fx \to Fa$……恒真文

これに対して、Ｆａは恒真文ではありません。

可能な解釈は無限にある

論議領域の取り方は無限にありますので、全ての解釈について文が真となるかどうかを調べることはせきません。

一方で、命題論理では文に関係する解釈は有限でしたので、全ての解釈について調べることができました。

例

p	q	r	p → q ∨ r
1	1	1	1 1 1 1 1
	⋮		
0	0	0	0 1 0 0 0

８通りだけ

述語論理では命題論理の真理表に相当するような恒真文の判定法はありません。

推論の妥当性

例　全ての人間は死すべきものである。

ソクラテスは人間である。

∴ソクラテスは死すべきものである。

「人間」をＦ、「死すべきもの」をＧ、「ソクラテス」をａとして記号化してみます。

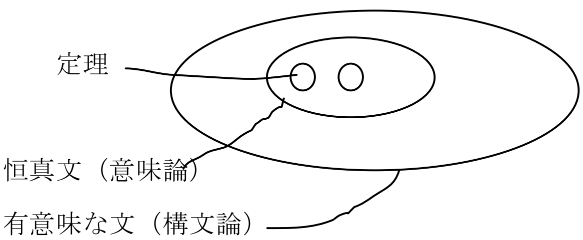
$\forall x (Fx \to Gx)$

Fa

$\therefore Ga$

ここで、この推論に対応する条件文　$\forall x (Fx \to Gx) \,\&\, Fa \to Ga$　について考えてみます。しかし、この文が恒真文かどうか分かりません。述語論理が恒真かどうかを判断するには、別の方法が必要です。

述語論理の形式化



※命題論理の時と同じです

形式化には２つの方法が存在します

①公理化

公理から出発して、推論規則を用いて定理を導きます。

②自然演繹法

推論規則だけから定理を導きます。

以上の方法を適用することで、述語論理でも完全性が成立します。

※恒真文の集合が存在するには定理の集合となる形式的体系が必要なので、自然演繹法から形式的体系を作ります。

自然演繹体系

自然演繹体系は全部で 15 存在します。(試験で使うのはそのうちの 13) このような形式的体系を作り用いることで、述語論理の推論を証明します。この体系は、全て推論規則から導かれます。前提

前提は全て真とします。(を除く)

⑴連言導入

$$\frac{p \quad q}{p \,\&\, q}$$

⑵連言除去

$$\frac{p \,\&\, q}{p} \qquad \frac{p \,\&\, q}{q}$$

⑶選言導入

$$\frac{p}{p \vee q} \qquad \frac{q}{p \vee q}$$

⑷選言除去

$$\frac{p \vee q \quad p \to q \quad q \to r}{r}$$

⑸二重否定導入

$$\frac{p}{\sim\sim p}$$

⑹二重否定除去

$$\frac{\sim\sim p}{p}$$

⑺同値導入

$$\frac{p \to q \quad q \to p}{p \equiv q}$$

⑻同値除去

$$\frac{p \equiv q}{(p \to q) \,\&\, (q \to p)}$$

⑼含意除去

$$\frac{p \to q \quad p}{q}$$

前件肯定式

(モードゥス・ポーネント)

⑽含意導入

$$\frac{\begin{matrix} p \\ \vdots \\ q \end{matrix}}{p \to q}$$

pを真だと仮定します。
この仮定からqが導ければ、
p→qが真だと分かります。

例
①pを真だと仮定します。
②p∨q　①と選言導入より
③〜〜(p∨q)　②と二重否定導入より
④p→〜〜(p∨q)は恒真だと分かります。

⑾否定導入

$$\frac{\begin{matrix} p \\ \vdots \\ q \,\&\, \sim q \end{matrix}}{\sim p}$$

pを真と仮定します。そこから導いて行き「q&〜q」というような矛盾を導きます。
つまり、背理法を用いてpが真であることによって生じる矛盾を示して、〜pが真である、と導きます。

例1

$$\frac{\begin{matrix} p \to q \\ \sim q \end{matrix}}{\sim q}$$

⑴	p→q	前提より
⑵	〜q	前提より
⑶	p	仮定する
⑷	q	⑴と⑶と含意除去より
⑸	q&〜q	⑵と⑷と連言導入より
∴⑹	〜p	⑸が矛盾したから

例2　{(p→q)&〜q}→p　は恒真文か?

⑴	(p→q)&〜q	仮定
⑵	p→q	⑴、連言除去
⑶	〜p	⑴、連言除去
⑷	p	仮定
⑸	q	仮定
⑹	q&〜q	⑶、⑸、連言導入
⑺	〜p	⑹が矛盾
∴⑻	{(p→q)&〜q}→p	は恒真文である。

⑿全称例化

$$\frac{\forall x_i A(x_i)}{A(t)}$$

例

$$\frac{\forall x\,(Fx \to Gx)}{\text{◎}\,Fa \to Ga}$$

×Ｆａ→Ｇｘ　（ａとｘが混在している。）

⒀全称普遍化　（授業では扱いませんでした。試験にも出ません。）

$$\frac{A(x_i)}{\forall x_i A(x_i)}$$

⒁存在普遍化

$$\frac{A(t)}{\exists x_i A(x_i)}$$

例

$$\frac{Fa \to Ga}{\text{◎}\ \exists x\,(Fx \to Gx)}$$

◎　∃ｘ（Ｆｘ→Ｇａ）

⒂存在例化（試験には出ません）

$$\frac{\exists x_i A(x_i)}{A(\alpha_i)}$$

条件付き

例

$$\frac{\exists x\,(Fx \to Gx)}{Fa \to Ga}$$

証明

①推論の証明は推論の前提から結論を以上の推論規則のみを用いて導出したものです。

②恒真文の証明は仮定から含意導入、また否定導入の規則によって仮定ぬきの文を導出したものです。

例題　自然演繹法により、次の推論の正しさを証明しなさい。

ジャックはフランス人である。すべてのフランス人は金持ちである。故に、ジャックは金持ちである。

ジャックをａ　フランス人をＦ　金持ちをＧ　として推論を立てます。

$$\frac{\begin{array}{l} Fa \\ \forall x\,(Fx \to Gx) \end{array}}{Ga}$$

⑴	Ｆａ	前提
⑵	∀ｘ（Ｆｘ→Ｇｘ）	前提
⑶	Ｆａ→Ｇａ	⑵全称例化
⑷	Ｇａ	⑴、⑶、含意除去

以上から推論が正しい（恒真文）であることが分かります。

練習問題　自然演繹法により、次の推論の正しさを証明しなさい。

練習 30

⑴トムはけちである。いかなるアメリカ人もけちではない。故に、トムはアメリカ人ではない。

⑵メアリーはフランス人ではない。貧乏な人はすべてフランス人である。故に、メアリーはフランス人ではない。

⑶男の看護人は皆、思いやりがある。ウィリアムは思いやりがない男だ。故に、ウィリアムは看護人ではない。

⑷江戸っ子を除けば、日本人はすべて気前がよくない。太郎は日本人だが、気前がいい。故に、太郎は江戸っ子ではない。

練習 31

⑴受験生は誰も遊ばない。太郎は不良だが、受験生である。故に、遊ばない不良がいる。

⑵いかなる受験生も遊ばない。花子は高校３年生だが、遊ぶ。故に、ある高校３年生は受験生ではない。

⑶学生は誰でも勉強する。花子は女子学生である。故に、ある女子は勉強する。

⑷すべての被造物は滅びる。キリストは不滅の存在者だ。故に、ある存在者は被造物でない。

練習 32

⑴すべてのらくだはやさしい御者が好きだ。らくだのタータンは御者のモハメットが好きではない。故に、モハメットはやさしくない。

⑵少女の花子は少年の太郎を愛する。すべての少年はどんな少女でも愛する。故に、太郎と相思相愛のものがいる。

⑶雨が降れば、いかなる鳥も幸福でない。風が吹かなければ、鳥のメアリーは幸福である。故に、雨が降れば、風も吹く。

試験では、真理表（計算）、背理法、文章の記号化、述語論理の論議領域（真理値計算）自然演繹法、語句説明などが出題されます。特に、語句説明は注意してください。
過去には、「推論の形式的性格」や「命題論理の完全性」、また、「統語論」「意味論」「形式的体系」を説明させる問題が出題されています。「公理」や「定理」、また、「自然演繹体系」や「証明」なども説明できるはうが良いと思います。もう一度、このプリントやノートを見直したりして、考えてみてください。