2006 年度夏学期 「記号論理学 I」 試験対策プリント

1 年生 文科 2 類 16 組 多田 康政

1　はじめに

この試験対策プリントでは、金曜日 1 時限の信原幸弘による「記号論理学 I」を扱う。信原教官は、2003 年度夏学期および 2004 年度夏学期の「記号論理学 I」を担当しておられた (試験問題は流出していないが、2005 年度夏学期の「記号論理学 I」をも担当しておられたようだ)。当時の試験問題が流出しているので、その分析をしてみた。

- 第 1 問 · · · 真理表による犯人特定問題
- 第 2 問 · · · 背理法による恒真文判定問題
- 第 3 問 · · · 真理値分析問題
- 第 4 問 · · · 日常表現の記号表現化問題
- 第 5 問 · · · 自然演繹法による証明問題
- 第 6 問 · · · 理論や性質などの語句説明問題

以上のような試験形式は 2006 年度夏学期においても保持されると思われる。また、解答用紙は両面 1 枚、計算用紙は 1 枚、持ち込み不可で、試験時間は 80 分となっている。第 1 問・第 2 問では命題論理が、第 3 問・第 4 問・第 5 問では述語論理がテーマとなる。第 6 問での得点は難しいため、第 1 問から第 5 問までを確実に押さえることが高得点への道となるだろう。以下では各問題への対策を実際の過去問題を解きながら身に付けることを目標とする。基礎事項の説明も加えてあるので安心して取り組んで欲しい。

2　第 1 問への対策

2.1　問題

ここでは 2003 年度夏学期の過去問題を取り上げる。以下にその問題を示す。

> ドラキュラ伝説の地、トランシルヴァニアで 3 人の怪しい人物 a, b, c に出会った。
> ⑴ a, b, c のうち少なくとも 1 人は吸血鬼である。
> ⑵ a が吸血鬼なら、b または c も吸血鬼である。
> ⑶ c が吸血鬼なら、b も吸血鬼である。
> ⑷ b, c ともに吸血鬼なら、a も吸血鬼である。
> ⑸ a, b, c のうち少なくとも 1 人は吸血鬼ではない。
> 誰が吸血鬼で、誰が吸血鬼ではないか。真理表を書いて判定せよ。

2.2　命題論理における用語

問題を解く前に、命題論理の基礎を確認する。まずは命題論理を扱う上で知っておかなければならない用語について見ることにしよう。

⑴ 命題 proposition

命題とは真偽 (真理値) を判定することのできる文のことである。命題は P や Q などの命題記号で表される。命題記号と論理記号 (否定詞や接続詞を表す記号、∼ や & などのこと) が有意味に並んだ式を論理式と呼ぶ。

⑵ 真理関数 truth function

分子命題 (原子命題 (否定詞も接続詞も含まない命題) をもとにして否定詞や接続詞を用いて構成された命題) の真偽はそれを構成する原子命題の真偽に応じて一通りに定まっている。これはすなわち、分子命題の真偽は原子命題の真偽の関数になっているということにほかならない。そこでこれを、真偽に対する関数ということで、真理関数と呼ぶ。

⑶ 真理表 truth table

真理関数は原子命題の真理値の組み合わせとそれに対応する分子命題の真理値の一覧表として表現されるが、この表のことを真理表と呼ぶ。

2.3　基本的な真理関数

次に命題論理において基本的とされる五つの真理関数について見ることにしよう。ただし、ここからは略記として、真と偽の代わりに 1 と 0 という数値を用いることにしたい。

⑴ 否定 negation: ∼P

「P ではない」という日常表現をもとに考えた真理関数を「否定」と呼び、「∼P」と書く。∼P は P と逆の真理値となる。「P ではない」と読む。

⑵ 連言 conjunction: P&Q

「P かつ Q」という日常表現をもとに考えた真理関数を「連言」と呼び、「P&Q」と書く。P&Q は、P と Q の両方が真の場合にのみ真となる。それ以外の場合は偽とされる。「P かつ Q」と読む。

⑶ 選言 disjunction: P∨Q

「P または Q」という日常表現をもとに考えた真理関数を「選言」と呼び、「P∨Q」と書く。P∨Q は、P と Q のどちらか一方および両方が真の場合にのみ真となる (両立的選言)。それ以外の場合は偽とされる。「P または Q」と読む。

⑷ 含意 implication: P→Q
「P ならば Q」という日常表現をもとに考えた真理関数を「含意」と呼び、「P→Q」と書く。P→Q は、P という条件が満たされているのに Q という帰結が満たされていない場合、つまり P が真でありながら Q が偽の場合にのみ偽となる。それ以外の場合は真とされる。条件節 P は前件、帰結節 Q は後件と呼ばれ、「P ならば Q」と読む。

⑸ 同値 equivalence: P≡Q
P→Q と Q→P が両方成り立つとき、「P と Q は同値である」と言われる。
それゆえ、P≡Q は (P→Q)&(Q→P) に等しい。

P	Q	∼P	P&Q	P∨Q	P→Q	P≡Q
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

上の表は五つの真理関数の真理表である。論理記号のうち、否定詞に対応する「∼」を否定子、接続詞に対応する「&」「∨」「→」「≡」を結合子と呼ぶ。以上のことを理解することができれば、問題を解くことができる。では、さっそく解いてみることにしよう。

2.4 問題の解説

まずは与えられた条件文を論理式 (記号表現) に直すことから始めよう。「a はドラキュラである」「b はドラキュラである」「c はドラキュラである」をそれぞれ命題 A, B, C で表すとすると、与えられた条件文は次のような論理式で表される。ただし、⑸については ∼A ∨ ∼B ∨ ∼C としても同じことである。

⑴ A ∨ B ∨ C
⑵ A → (B ∨ C)
⑶ C → B
⑷ (B & C) → A
⑸ ∼(A & B & C)

次に真理表を書いてみよう。

A	B	C	A∨B∨C	A→(B∨C)	C→B	(B&C)→A	∼(A&B&C)
1	1	1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1

条件文のすべてを満たしているのは、上の表の 2 行目と 6 行目のみである。これは「a と b が吸血鬼であり、c は吸血鬼ではない」または「b が吸血鬼であり、a と c は吸血鬼ではない」ということを表す。従って、問題の答えは以下のようにまとめることができる。

a は吸血鬼であるかどうかわからない。
b は吸血鬼である。
c は吸血鬼ではない。

2.5 まとめ

あっさり問題を解き終えてしまったわけだが、面倒な機械的作業となるため、慎重に取り組まないとミスをしがちになるので気をつけて欲しい。それでは第 1 問を正解するためのポイントをまとめておこう。

- 条件文を正しく論理式 (記号表現) に直す
- 真理表を正確に書く
- 条件文のすべてを満たす原子式 (原子命題を表す記号、P や Q などのこと) のパターンを抽出する

3 第 2 問への対策

3.1 問題

ここでは 2004 年度夏学期の過去問題を取り上げる。以下にその問題を示す。

次の文が恒真文かどうかを背理法によって判定せよ。
$P \vee (Q \ \& \ R) \rightarrow (P \vee Q) \ \& \ (P \vee R)$

3.2　恒真文と背理法

問題を解く前に、恒真文と背理法について見ることにしよう。

⑴ 恒真文 tautology

恒真文とは原子式の真理値によらず、つねに真となる論理式のことである。これとは逆に、原子式の真理値によらず、つねに偽となる論理式のことを矛盾文と呼ぶ。

⑵ 背理法 reductio ad absurdum

背理法とは A→(D&∼D) から ∼A を導出することである。なぜこれが認められるのかを簡単に示そう。D&∼D は見ての通り矛盾文であり、その真理値は D の真理値によらず偽である。ここで A→(D&∼D) は真であるから、必然的に A は偽となり、∼A は真となる。よって、A→(D&∼D) から ∼A を導出することができる。

それでは背理法によって、与えられた文が恒真文であるかをどのように判定するのだろうか。与えられた文が偽となることがあると仮定して矛盾を生じれば、背理法により、与えられた文は偽となることがない、すなわち恒真文であると判定することができる。このことを理解することができれば、問題を解くことができる。では、さっそく解いてみることにしよう。

3.3　問題の解説

まずは与えられた文「P∨(Q&R)→(P∨Q)&(P∨R)」が偽となることがあると仮定してみよう。このとき、前件「P∨(Q&R)」は真、後件「(P∨Q)&(P∨R)」は偽でなければならない。次に P が真であると仮定すると、後件「(P∨Q)&(P∨R)」は真となり矛盾を生じるから、背理法により、P は偽である。ここで、前件「P∨(Q&R)」は真だから、Q と R は真である。しかし、P が偽で Q と R が真のとき、偽であるはずの後件「(P∨Q)&(P∨R)」は真となり矛盾を生じるから、背理法により、与えられた文「P∨(Q&R)→(P∨Q)&(P∨R)」は偽となることがない、すなわち恒真文である。これが問題の答えとなる。下の図は論理展開の手順を行ごとに表したものである。

P	∨	(Q	&	R)	→	(P	∨	Q)	&	(P	∨	R)
					0							
	1								0			
0						0				0		
			1									
		1		1				1				1
							1				1	
									1			

3.4 まとめ

この問題では、与えられた文が偽となることがあると仮定すると矛盾を生じたが、その仮定により矛盾を生じない場合、与えられた文は当然恒真文ではないことになる。それでは第 2 問を正解するためのポイントをまとめておこう。

- 与えられた文が偽となることがあると仮定する
- 与えられた文を分解し、仮定に従って真理値分析をする (場合分けが必要なこともある)
- 仮定より矛盾を生じたら、背理法により、与えられた文は恒真文であると判定できる

4 第 3 問への対策

4.1 問題

ここでは 2003 年度夏学期の過去問題を取り上げる。以下にその問題を示す。

> 次の解釈のもとで、⑴から⑻までの各文の真理値を定めよ。
> 論議領域 D: { 春男, 秋男, 夏子, 冬子 }
> a: 春男, b: 秋男, c: 夏子, d: 冬子
> F: { 春男, 秋男 }, G: { 夏子, 冬子 }, R: {⟨ 春男, 春男 ⟩, ⟨ 春男, 秋男 ⟩, ⟨ 春男, 冬子 ⟩, ⟨ 秋男, 春男 ⟩, ⟨ 秋男, 夏子 ⟩, ⟨ 夏子, 夏子 ⟩, ⟨ 夏子, 冬子 ⟩, ⟨ 冬子, 春男 ⟩, ⟨ 冬子, 秋男 ⟩, ⟨ 冬子, 夏子 ⟩}
> ⑴ Fa ⑵ Gb ∨ Rcd ⑶ ∀x Rbx ⑷ ∃x (Gx & Rxa) ⑸ ∀x ∀y (Fx & Gy → Rxy)
> ⑹ ∃y (Gy & ∀x (Fx → Rxy)) ⑺ ∀x (Fx & Rxx → ∼∃y (Gy & Rxy))
> ⑻ ∃x (Gx & ∀y (Ryx → Rxy))

4.2 述語論理における用語

問題を解く前に述語論理の基礎を確認する。述語論理を扱う上で知っておかなければならない用語について見ることにしよう。

⑴ 命題関数 propositional function

命題から個体を表す表現を空欄にし、x や y などで置き換えたものを命題関数と呼ぶ。すなわち固有名から命題への関数である。個体が満たす性質や関係を表した表現を述語と呼び、F や G などの記号で表される。そこで、命題関数は Fx や Gy、あるいは Fxy や Gxy といった具合に記号化されることになる。

⑵ 変項 variable

命題関数における x や y などを (個体) 変項と呼ぶ。変項の値となる固有名は a や b などの記号で表され、(個体) 定項と呼ばれる。そこで、命題は Fa や Gb、あるいは Fab や Gab といった具合に記号化されることになる。

⑶ 量化 quantification

命題関数の変項に「すべて」や「ある」といった量を与えることを「量化する」と言う。「∀」を全称量化子と呼び、「∃」を存在量化子と呼ぶ。両方を合わせて単に量化子と呼ぶ。また、Fx における変項 x のように量化されていない変項を自由変項と呼び、∀xFx における変項 x のように量化されている変項を束縛変項と呼ぶ。

⑷ 論議領域 domain of discourse

議論されている範囲が、例えば「整数」のように設定されているとき、整数であることはことさら言わなくてよい。このようにあらかじめ設定された対象の範囲を論議領域と言い、D という記号で表す。

以上のことを理解することができれば、問題を解くことができる。では、さっそく解いてみることにしよう。

4.3 問題の解説

まずは問題で与えられた解釈を簡単にまとめてみよう。

- これは四つの定項 a, b, c, d についてのみのである。
- 命題関数 Fx は、x=a,b のとき真となり、x=c,d のとき偽となる。
- 命題関数 Gx は、x=c,d のとき真となり、x=a,b のとき偽となる。
- 命題関数 Rxy は、(x,y)=(a,a),(a,b),(a,d),(b,a),(b,c),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c) のとき真となり、(x,y)=(a,c),(b,b),(b,d),(c,a),(c,b),(d,d) のとき偽となる。

次にこれをもとにして実際に問題を解いていくことにしよう。

⑴ Fa

Fa は明らかに真である。

⑵ Gb ∨ Rcd

Gb は偽であり、Rcd は真であるから、Gb∨Rcd は真である。

⑶ ∀x Rbx

Rbx は x=a,c のときのみ真である。従って、すべての x について Rbx が真とはならないから、∀xRbx は偽である。

⑷ ∃x (Gx & Rxa)

Gx は x=c,d のときのみ真であり、Rxa は x=a,b,d のときのみ真である。よって、x=d のとき Gx&Rxa は真である。従って、Gx&Rxa が真となる x は確かに存在するから、∃x(Gx&Rxa) は真である。

⑸ ∀x ∀y (Fx & Gy → Rxy)

すべての x, y について Fx&Gy→Rxy が真とはならないと仮定する。このとき Fx&Gy が真となり、かつ Rxy が偽となる (x,y) が存在すればよい。Fx&Gy は (x,y)=(a,c),(a,d),(b,c),(b,d) のときのみ真であり、Rxy は (x,y)=(a,c),(b,b),(b,d),(c,a),(c,b),(d,d) のときのみ偽である。よって、(x,y)=(a,c),(b,d) のとき Fx&Gy→Rxy は偽である。従って、すべての x, y について Fx&Gy→Rxy が真とはならないから、∀x∀y(Fx&Gy→Rxy) は偽である。

⑹ ∃y (Gy & ∀x (Fx → Rxy))

Gy&∀x(Fx→Rxy) が真となる y が存在すると仮定する。このとき Gy が真となり、かつ ∀x(Fx→Rxy) が真となる (x,y) が存在すればよい。Gy は y=c,d のときのみ真であるから、y=c,d のときすべての x について Fx→Rxy が真となることがあるかどうかを調べれば十分である。

① y=c のときすべての x について Fx→Rxy が真とはならないと仮定する。このとき Fx が真となり、Rxy が偽となる (x,y) が存在すればよい。Fx は x=a,b のときのみ真であり、y=c より Rxy は x=a のときのみ偽である。よって、(x,y)=(a,c) のとき Fx→Rxy は偽である。

② y=d のときすべての x について Fx→Rxy が真とはならないと仮定する。このとき Fx が真となり、Rxy が偽となる (x,y) が存在すればよい。Fx は x=a,b のときのみ真であり、y=d より Rxy は x=b,d のときのみ偽である。よって、(x,y)=(b,d) のとき Fx→Rxy は偽である。

以上より、Gy が真となるとき (y=c,d のとき) すべての x について Fx→Rxy が真とはならないから、Gy&∀x(Fx→Rxy) が真となる y は存在しない。従って、∃y(Gy&∀x(Fx→Rxy)) は偽である。

⑺ ∀x (Fx & Rxx → ~∃y (Gy & Rxy))

すべての x について Fx&Rxx→~∃y(Gy&Rxy) が真とはならないと仮定する。このとき Fx&Rxx が真となり、~∃y(Gy&Rxy) が偽となる (x,y) が存在すればよい。Fx は x=a,b のときのみ真であり、Rxx は x=a,c のときのみ真である。よって、Fx&Rxx は x=a のときのみ真であるから、x=a のとき Gy&Rxy が真となる y が存在しないかどうかを調べれば十分である。Gy は y=c,d のときのみ真であり、x=a より Rxy は y=a,b,d のときのみ真であるから、(x,y)=(a,d) のとき Gy&Rxy は真となる。よって、Fx&Rxx が真となるとき (x=a のとき)Gy&Rxy が真となる y は存在するから、すべての x について Fx&Rxx→~∃y(Gy&Rxy) は真とはならない。従って、∀xFx&Rxx→~∃y(Gy&Rxy) は偽である。

⑻ $\exists x\ (Gx\ \&\ \forall y\ (Ryx \rightarrow Rxy))$

Gx&∀y(Ryx→Rxy) が真となる x が存在すると仮定する。このとき Gx が真となり、かつ ∀y(Ryx→Rxy) が真となる (x,y) が存在すればよい。Gx は x=c,d のときのみ真であるから、x=c,d のときすべての y について Ryx→Rxy が真となることがあるかどうかを調べれば十分である。

① x=c のときすべての y について Ryx→Rxy が真とはならないと仮定する。このとき Ryx が真となり、Rxy が偽となる (x,y) が存在すればよい。x=c より Ryx は y=b,c,d のときのみ真であり、Rxy は y=a,b のときのみ偽である。よって、(x,y)=(c,b) のとき Ryx→Rxy は偽である。

② x=d のときすべての y について Ryx→Rxy が真とはならないと仮定する。このとき Ryx が真となり、Rxy が偽となる (x,y) が存在すればよい。x=d より Ryx は y=a,c のときのみ真であり、Rxy は y=d のときのみ偽である。よって、x=d のときすべての y について Ryx→Rxy は真となる。

以上より、すべての y について Ryx→Rxy が真となる x は確かに存在するから、∃xGx&∀y(Ryx→Rxy) は真である。

4.4 まとめ

問題の解説がやや長くなり、難しそうなことをやっているかのような印象を与えてしまったかもしれないが、実際にやっていることは至って単純である。何をしようとしているのかをきちんと把握しながら問題を解くように心掛けて欲しい。それでは第 3 問を正解するためのポイントをまとめておこう。

- 与えられた解釈を正確に把握する
- 与えられた文を分解し、命題関数の性質を利用して場合分けを減らす
- 「∀」は反例を、「∃」は具体例を示す方針で取り組む

5 第 4 問への対策

5.1 問題

ここでは 2004 年度夏学期の過去問題を取り上げる。以下にその問題を示す。

> 次の各文を述語論理の記号表現に直せ。
> ⑴ すべてのイヌはいかなるネコよりも強い。
> ⑵ あるトラはあるライオンよりも速い。
> ⑶ ある少年は自分よりも年上の男をすべて恐れる。
> ⑷ あるゾウの足はいかなるウシの足よりも大きい。

5.2　量化子

問題を解く前に量化子について再確認したい。それぞれの量化子に対して簡単な例文とその言い換え、記号表現を以下に示した。ここでは「x は恐竜である」「x は肉食である」をそれぞれ命題関数 Dx, Fx で表すことにしよう。

⑴ 全称量化子 universal quantifier: ∀

変項 x を用いて「すべての恐竜は肉食である」は「すべての x について x が恐竜であるならば、x は肉食である」と言い換えられる。これは ∀x(Dx→Fx) と書ける。

⑵ 存在量化子 existential quantifier: ∃

変項 x を用いて「ある恐竜は肉食である」は「ある x が存在し、x は恐竜であり、かつ肉食である」と言い換えられる。これは ∃x(Dx&Fx) と書ける。

以上のことを理解していれば、容易に問題を解くことができるはずである。では、さっそく解いてみることにしよう。

5.3　問題の解説

与えられた文を言い換えるとき、日本語として明らかにおかしな表現がしばしば出てくる。しかし、それは記号表現への足掛かりに過ぎず、ここで問題にすることではないことをわかって欲しい。

⑴ すべてのイヌはいかなるネコよりも強い。

変項 x, y を用いて与えられた文を言い換えると、「すべての x について x がイヌであるならば、すべての y について y がネコであるならば、x は y よりも強い」となる。「x はイヌである」「x はネコである」「x は y よりも強い」をそれぞれ命題関数 Dx, Cx, Sxy で表すとすると、与えられた文は ∀x(Dx→∀y(Cy→Sxy)) と書ける。

また、与えられた文を「すべての x, y について x がイヌであり、かつ y がネコであるならば、x は y よりも強い」と言い換えることもできる。このとき与えられた文は ∀x∀y((Dx&Cy)→Sxy) と書ける。

⑵ あるトラはあるライオンよりも速い。

変項 x, y を用いて与えられた文を言い換えると、「ある x が存在し、x はトラであり、かつある y が存在し、y はライオンであり、かつ x は y よりも速い」となる。「x はトラである」「x はライオンである」「x は y よりも速い」をそれぞれ命題関数 Tx, Lx, Qxy で表すとすると、与えられた文は ∃x(Tx&∃y(Ly&Qxy)) と書ける。

また、与えられた文を「ある x, y が存在し、x はトラであり、かつ y はライオンであり、かつ x は y よりも速い」と言い換えることもできる。このとき与えられた文は ∃x∃y(Tx&Ly&Qxy) と書ける。

⑶ ある少年は自分よりも年上の男をすべて恐れる。

変項 x, y を用いて与えられた文を言い換えると、「ある x が存在し、x は少年であり、かつすべての y について y は x よりも年上であり、かつ男であるならば、x は y を恐れる」となる。「x は少年である」「x は y よりも年上である」「x は男である」「x は y を恐れる」をそれぞれ命題関数 Bx, Oxy, Mx, Fxy で表すとすると、与えられた文は ∃x(Bx&∀y((Oyx&Mx)→Fxy)) と書ける。

⑷ あるゾウの足はいかなるウシの足よりも大きい。

変項 p, q, r, s を用いて与えられた文を言い換えると、「ある p が存在し、p はゾウであり、かつ q は p の足であり、かつすべての r について r はウシであり、かつ s は r の足であるならば、s は q よりも大きい」となる。「x はゾウである」「x はウシである」「x は y の足である」「x は y よりも大きい」をそれぞれ命題関数 Ex, Cx, Fxy, Bxy で表すとすると、∃p(Ep&Fqp&∀r((Cr&Fsr)→Bsq)) と書ける。

5.4 まとめ

この問題は、量化子の意味が理解できていればそれほど難しくない。⑴から⑶までは変項が全て束縛変項であるが、⑷では束縛変項だけでなく自由変項も登場していることに注意してもらいたい。それでは第 4 問を正解するためのポイントをまとめておこう。

・ 記号表現に直しやすいように、変項を用いて与えられた文を言い換える
・ 言い換えた文を命題関数や量化子を用いて記号表現に直す

6 第 5 問への対策

6.1 問題

ここでは 2003 年度夏学期の過去問題を取り上げる。以下にその問題を示す。

> 自然演繹法により、次の推論の正しさを証明せよ。
> ⑴ 太郎は几帳面ではない。すべての論理学者は真面目で几帳面である。ゆえに、太郎は論理学者ではない。
> ⑵ すべての受験生はすべての厳しい教師を好む。太郎は厳しい教師である。勉強家の花子は太郎を好まない。ゆえに、ある勉強家は受験生ではない。
> ⑶ 雨が降ればどんな大学生も勉強しない。大学生の花子は風が吹けば勉強する。ゆえに、雨が降れば風は吹かない。

6.2 構成手続きと自然演繹法

問題を解く前に、構成手続きと自然演繹法について見ることにしよう。

⑴ 構成手続き construction procedure

推論 (あらかじめ与えられた何らかの前提から新しい結論を論理的に導き出す働きのこと) の正しさは真理表を用いて確かめることができる。これは評価手続きと呼ばれる。これに対して、構成手続きとは前提から結論が導かれるまでの手順を示す、すなわち前提から結論を一歩一歩引き出してみせることである。

⑵ 自然演繹法 natural deduction

命題論理において、評価手続きによって推論の正しさを確かめることができる。しかし、量化の概念を含む述語論理において、評価手続きによって必ずしも推論の正しさを確かめることができるわけではない。そこで、述語論理における推論の正しさは構成手続きによって確かめることになる。では、実際にその構成手続きの種類 (演繹規則) を見てみよう。

① A を仮定して B が導出されるとき、A という仮定なしに A→B を導出してよい	[含意導入]
② A と A→B から B を導出してよい	[含意除去]
③ A→(D&∼D) から ∼A を導出してよい	[否定導入]
④ ∼∼A から A を導出してよい	[否定除去]
⑤ A と B から A&B を導出してよい	[連言導入]
⑥ A&B から A または B を導出してよい	[連言除去]
⑦ A または B から A∨B を導出してよい	[選言導入]
⑧ A∨B と A→B と B→C から C を導出してもよい	[選言除去]
⑨ At から ∀xAx を導出してよい (t は限定なしの項)	[全称普遍化]
⑩ ∀xAx から At を導出してよい (t は任意の項)	[全称例化]
⑪ At から ∃xAx を導出してよい (t は任意の項)	[存在普遍化]
⑫ ∃xAx と Aa→C から C を導出してよい (a は新しい項の記号で C は a を含まない)	[存在例化]

これらの演繹規則に従って推論の正しさを示す構成手続きの方法を自然演繹法と呼ぶ。もちろん、これは述語論理に限らず命題論理の推論の正しさを示すのにも用いることができる。

以上のことを理解することができれば、問題を解くことができる。では、さっそく解いてみることにしよう。

6.3　問題の解説

まずは与えられた推論を記号表現に直すことから始めよう。次に前提をもとに結論が導けるように、うまく議論を進めていこう。

(1)「太郎」を定項 a で表し、「x は几帳面である」「x は論理学者である」「x は真面目である」をそれぞれ命題関数 Px, Lx, Sx で表すとする。このとき、前提 $\sim$Pa と $\forall$x(Lx$\to$(Px&Sx)) から結論 $\sim$La を導けばよい。

(1) $\sim$Pa	前提
(2) $\forall$x (Lx $\to$ (Px & Sx))	前提
(3) La $\to$ (Pa & Sa)	(2) 全称例化
(4) La	仮定
(5) Pa & Sa	(3) (4) 含意除去
(6) Pa	(5) 連言除去
(7) Pa & $\sim$Pa	(1) (6) 連言導入
(8) $\sim$La	(4) (7) 否定導入

(2)「太郎」「花子」をそれぞれ定項 a, b で表し、「x は受験生である」「x は教師である」「x は厳しい」「x は勉強家である」「x は y を好む」をそれぞれ命題関数 Cx, Tx, Sx, Dx, Lxy で表すとする。このとき、前提 $\forall$x(Cx$\to\forall$y((Sy&Ty)$\to$Lxy)) と Ta&Sa と Db&Lba から結論 $\exists$x(Dx&$\sim$Cx) を導けばよい。

(1) $\forall$x (Cx $\to$ $\forall$y ((Sy & Ty) $\to$ Lxy))	前提
(2) Sa & Ta	前提
(3) Db & $\sim$Lba	前提
(4) Cb $\to$ $\forall$y ((Sy & Ty) $\to$ Lby)	(1) 全称例化
(5) Cb $\to$ ((Sa & Ta) $\to$ Lba)	(4) 全称例化
(6) Cb $\to$ Lba	(2) (5) 含意除去
(7) Db	(3) 連言除去
(8) $\sim$Lba	(3) 連言除去
(9) Cb	仮定
(10) Lba	(6) (9) 含意除去
(11) Lba & $\sim$Lba	(8) (10) 連言導入
(12) $\sim$Cb	(9) (11) 否定導入
(13) Db & $\sim$Cb	(7) (12) 連言導入
(14) $\exists$x (Dx & $\sim$Cx)	(13) 存在普遍化

(3)「花子」を定項 a で表し、「雨が降る」「風が吹く」をそれぞれ命題 R, W で表して「x は大学生である」「x は勉強する」をそれぞれ命題関数 Cx, Sx で表すとする。このとき、前提 $R \rightarrow \forall x(Cx \rightarrow \sim Sx)$ と $Ca \& (W \rightarrow Sa)$ から結論 $R \rightarrow \sim W$ を導けばよい。

⑴ $R \rightarrow \forall x\ (Cx \rightarrow \sim Sx)$	前提
⑵ $Ca\ \&\ (W \rightarrow Sa)$	前提
⑶ $R \rightarrow (Ca \rightarrow \sim Sa)$	⑴ 全称例化
⑷ Ca	⑵ 連言除去
⑸ $W \rightarrow Sa$	⑵ 連言除去
⑹ $R \rightarrow \sim Sa$	⑶ ⑷ 含意除去
⑺ R	仮定
⑻ $\sim Sa$	⑹ ⑺ 含意除去
⑼ W	仮定
⑽ Sa	⑸ ⑼ 含意除去
⑾ $Sa\ \&\ \sim Sa$	⑻ ⑽ 連言導入
⑿ $\sim W$	⑼ ⑾ 否定導入
⒀ $R \rightarrow \sim W$	⑺ ⑿ 含意導入

6.4 まとめ

この問題は証明問題なので、前提と結論のつじつまをあわせるだけで得点できる。簡単そうに思えるが、自然演繹法に不慣れなまま問題に取り組もうとすると何をすればよいのかわからなくなってしまう。自分が今何をしようとしているのかを意識しながら問題を解くことによって、自然演繹法への理解を深めて欲しい。それでは第 5 問を正解するためのポイントをまとめておこう。

- 論理記号を除去し、使える条件文を増やして結論を導くのが基本方針となる
- 前提に含まれる全称量化子は結論に沿って最初に除去する (全称例化)
- 前提に含まれる連言は最初に除去する (連言除去)
- 含意を利用し、仮定から矛盾を導いて仮定の否定を導く (否定導入)

7 第 6 問への対策

7.1 問題

ここでは 2004 年度夏学期の過去問題を取り上げる。以下にその問題を示す。

> 次の語句について簡潔に説明せよ。
> ⑴ 推論の形式的性格
> ⑵ 命題論理の完全性

7.2　重要な語句と問題の解説

記号論理学を学ぶ上で知っておくべき語句を以下に示した。問題の解答例も示したので参考にしてもらいたい。

⑴ 推論の形式的性格

推論の妥当性 (正しさ) は文の内容や事実上の真偽から独立しており、少数の論理語の意味のみに基づいて成立する。このことを推論の形式的性格という。

⑵ 統語論 (構文論) と意味論

記号の意味を考慮せず、記号相互の導出関係、記号変形の規則のみを考察する立場を統語論 (構文論) という。これに対し、記号の意味に関わる現象のみを考察する立場を意味論という。また、統語論によって構成され、意味論によって解釈される人工的に定められた言語を日常言語 (自然言語) に対し、形成言語 (人工言語) という。

⑶ 対象言語とメタ言語 (高次言語)

対象について述べる言語を対象言語という。これに対し、対象言語の表現内容について述べる言語をメタ言語 (高次言語) という。

⑷ 公理系

まず、出発点として無前提に定理として承認される論理式をいくつか定める。ここで承認された論理式を公理と呼ぶ。次に、ある定理ないし諸定理からさらにどのような定理を導いてよいかを規定した規則を定める。この規則を導出規則 (推論規則) と呼ぶ。ここで、公理と導出規則を用いて次々に論理式を構成していく。こうして構成された論理式を定理と呼ぶ。このような構造を持った体系を公理系という。

⑸ 公理系の完全性

公理系の完全性は以下の二つのメタ定理より成り立つ。

①定理はすべて論理的真理である。

②論理的真理のすべてが定理として証明されうる。

①は特に公理の健全性といわれる。②は狭い意味でいわれるときの公理の完全性であり、①と②を合わせて、広い意味で完全性といわれる。

⑹ 命題論理と述語論理の完全性

命題論理と述語論理には完全な公理系が存在する。つまり、命題論理と述語論理には恒真文のすべてが定理として証明され、定理のすべてが恒真文となるような公理系が存在する。このことをそれぞれ命題論理の完全性、述語論理の完全性という。

7.3 まとめ

この問題は語句説明の問題で、あまり意識しない理論や性質などの内容が問われる。命題論理や述語論理とは一体何なのか、もう一度問い直す必要があるだろう。

8 おわりに

この試験対策プリントを一通り読めば、実際の試験でどういうことをするのかが具体的にわかってもらえるはずである。授業ノートを見直したりするだけでは、わからない部分も多い。実際に過去問題を解かないと身に付かない技術的なことも数多くある。そこで、この試験対策プリントでは授業ノートだけからではわからない技術的なことを重点的に扱った。この試験対策プリントが少しでも多くの人の試験対策に役立ててもらえると光栄である。それでは $\cdots$ 諸君の幸運を祈る!