$\log(1+x)$のマクローリン展開の証明

[吹田新保『理工系の微分積分学』p48→コーシーの剰余項を使う；高木・押切『解析 I ・微分』p18]

[問題の定式化]

テーラーの定理：

「$f(x)$を区間 I で n 回微分可能な関数とする。$a\in I$ を定点、$x\in I$ を任意の点とするとき、

以下の式を満たす点 c が x と a の間に存在する。

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)/(1!)+f''(a)(x-a)^2/(2!)+\cdots+f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}/(n-1)!+R_n$$

$$R_n=f^{(n)}(c)(x-a)^n/(n!)$$ 」

ここで、$f(x)=\log(1+x)$ とすると、

対数関数の微分 から　$\{\log(1+x)\}'=1/(1+x)$、

対数関数の高次微分　$(d^n/dx^n)\log(1+x)=(-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$

つまり、$(d^2/dx^2)\log(1+x)=-1/(1+x)^2$

$(d^3/dx^3)\log(1+x)=+2/(1+x)^3$

$(d^4/dx^4)\log(1+x)=-3!/(1+x)^4$

$(d^5/dx^5)\log(1+x)=+4!/(1+x)^5$

(…てな具合に、つづく…)

だから、この場合、テーラーの定理は、

「

$$\log(1+x)=\log(1+a)+\frac{1/(1+a)}{1!}(x-a)+\frac{-1/(1+a)^2}{2!}(x-a)^2+\frac{2/(1+a)^3}{3!}(x-a)^3+\frac{-3!/(1+a)^4}{4!}(x-a)^4$$

$$+\frac{4!/(1+a)^5}{5!}(x-a)^5\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!/(1+a)^{n-1}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n,$$

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!/(1+c)^n}{n!}(x-a)^n$$

を満たす点 c が x と a の間に存在する。」

となる。

さらに、$a=0$ とすると、

「 $\log(1+x)=\log 1+x-x^2/2!+2!x^3/3!-3!x^4/4!+4!x^5/5!-\cdots$

$\cdots+(-1)^{n-2}(n-2)!x^{n-1}/(n-1)!+R_n$

$=x-x^2/2+x^3/3-x^4/4+x^5/5-\cdots+(-1)^{n-2}x^{n-1}/(n-1)+R_n$ ，

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+c)^n}$$

を満たす点cがxと０の間に存在する。すなわち$0< c <x$または$x< c <0$ 。」

したがって、$|x|<1$ の条件下での $\log(1+x)$のマクローリン展開を証明するには、

$0< c <x$ または $x< c <0$…①

かつ $-1< x < 1$ …②

として、

$$R_n=\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+c)^n}$$

という数列が $n\to\infty$としたときに 0 に収束することを示せばよい。

[証明]

ラグランジュ剰余項

$$|R_n|=\left|\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(1+c)^n}\right|=\frac{1}{n}\frac{|x|^n}{|1+c|^n}$$

∵絶対値の性質、n:自然数

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{|1+c|}\right)^n$$

は、$0<x\leqq 1$ ならば、収束する。

なぜなら、 $0< c <x \leqq 1$ なので、$x \leqq 1<1+c$ となって、

$$\left(\frac{|x|}{|1+c|}\right)^n=\left(\frac{x}{1+c}\right)^n\to 0 \quad (n\to\infty)$$

となって、$|R_n|\to 0\ (n\to\infty)$。したがって、$R_n\to 0\ (n\to\infty)$

ところが、$-1\leqq x\leqq 0$ のときは、これだと、微妙。

そこで、コーシーの剰余項をとる。

コーシーの剰余項は一般に、

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n}{(n-1)!}\quad f^{(n)}(a+\theta(x-a)) \qquad (0<\theta<1)$$

$a=0$ として、

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}\quad f^{(n)}(\theta x) \qquad (0<\theta<1)$$

$f(x)=\log(1+x)$ とすると、対数関数の高次微分から

$$f^{(n)}(x)=(d^n/dx^n)\log(1+x)=(-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$$

よって、$f^{(n)}(\theta x)=(d^n/dx^n)\log(1+\theta x)=(-1)^{n-1}(n-1)!/(1+\theta x)^n$

なので、

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+\theta x)^n}=\frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n}\qquad(0<\theta<1)$$

$$|R_n|=\left|\frac{(-1)^{n-1}(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^n}\right|=\frac{|-1|^{n-1}|1-\theta|^{n-1}|x|^n}{|1+\theta x|^n}$$

∵絶対値の性質

$$=\frac{1^{n-1}(1-\theta)^{n-1}|x|^n}{(1+\theta x)^n}$$

∵|－1|=1、0< θ <1 より 0<1－ θ <1 よって|1－ θ |=1－ θ 、

②の－1<x と 0< θ <1 から－1< θ x よって 0<1+ θ x よって

|1+ θ x|＝1+ θ x

$$=\frac{(1-\theta)^{n-1}|x|^n}{(1+\theta x)^n}=\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1+\theta x)^{n-1}}\frac{|x|^n}{1+\theta x}=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}\frac{|x|^n}{1+\theta x}$$

$$\leq\frac{|x|^n}{1+\theta x}$$

∵| x |<1(つまり－1<x<1)だから、(１+xθ)は、(1－ θ)と(1+ θ)の

間になる。

0< θ <1 だから、0<(1－ θ)<(１+xθ)<(1+ θ)<2

ここで 0<(1－ θ)<(１+xθ)に注目すると、

0<(1－ θ)／(１+xθ)<1

だから、

$$0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}<1$$

$$\leq\frac{|x|^n}{1-|x|}$$

∵－１<x≦0 のとき、0< θ <1 だから、－１<x≦ θ x≦0

各辺に 1 を足すと、0<(1+x) ≦(1+ θ x)≦1

0≦x<１のとき、0< θ <1 だから、－１<－x≦0≦ θ x< θ <１

各辺に 1 を足すと、0<(1－x)≦1≦(1+ θ x)<(1+ θ)<2

つまり、－１<x≦0 で 0<(1+x)≦(1+ θ x)、

0≦x<１で 0<(1－x)≦(1+ θ x)

まとめると、| x |<1 で 0<(1－| x |)≦(1+ θ x)

よって、| x |<1 で 1／(1－| x |)≧1／(1+ θ x)

（ポイント） θ は n が増えると変わってくるので、n→∞の極限値を求めるにあたっ

て、どけておきたい。

だから、こういった作業がなされている。

以上をまとめると、

$$0 \leq |R_n| \leq \frac{|x|^n}{1-|x|}$$

この最右辺→0 (n→∞)

いわゆる「はさみうちの原理」より、

$|R_n|$→0 (n→∞)

したがって、R_n→0 (n→∞)

(http://www.ne.jp/asahi/search-center/internationalrelation/mathWeb/Differentiation/Differential1VarFnctn/ThrmTaylorExpansionPrf.htm#PrfMaclaurinSeriesOfLogPlus1Fnctn
より転載)